4 fields and 4 forces

소새 사람 김진학(ginacdl@hotmail.com)

힘은 네 가지 차원의 장(vector field)에서 만들어집니다.
이 장들이 에너지 밀도와 전자기력, 약력, 중력을 잘 설명합니다.
강력도 설명합니다.
질량, 전하, spin, color, Higgs 에 대해서도
수식으로 그들의 차원과 특성을 잘 설명합니다.

이미 알고 있는 curl 을 새롭게 만들었습니다.
그리고 4 차원에서 vector 는 16 원수(sedenion)입니다.
서로 곱할 수 있습니다.
어렵지는 않습니다. 생소할 뿐입니다.

차례

1 multi-vector

이 책은 multi-vector 로 서술한다. multi-vector 와 dot product 그리고 dual vector 만 이해하면 이 책을 읽는 어려움은 없다. 이제부터 vector 는 multi-vector 를 의미이다.

multi-vector 는 여러 개의 1-vector(기존의 vector)를 wedge(∧) product 하여 얻어진다. $v_1, v_2, \ldots, v_r$ 가 1-vector 라면, $(v_1 \wedge v_2)$는 2-vector 이고 $(v_1 \wedge v_2 \wedge v_3)$는 3-vector 이다.

중요한 것은 multi-vector 로 수를 확장할 수 있다는 것이다. 5 장에서 설명한다.

A. anti-symmetry

vector 는 wedge product 의 순서를 바꾸면 부호가 바뀐다. anti-commutative

$$(v_1 \wedge v_2) = -(v_2 \wedge v_1)$$

$$(v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) = \varepsilon_{ijk}\left(v_i \wedge v_j \wedge v_k\right), \qquad i, j, k = 1,2,3, \qquad \varepsilon_{ijk}: Levi - Civita\ symbol$$

…

B. dot product

vector 의 dot product 는 교환법칙이 성립한다. a, b, c 가 1-vector 라면,

$$a \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r)$$
$$= (-1)^{i-1}(a \cdot v_i)(v_1 \wedge \ldots \wedge \breve{v}_i \wedge \ldots \wedge v_r), \qquad \breve{v}_i: v_i\ skip, \qquad Einstein\ summation$$
$$= (v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r) \cdot a$$

ex) $a \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge v_3)$

$$= (a \cdot v_1)(v_2 \wedge v_3) - (a \cdot v_2)(v_1 \wedge v_3) + (a \cdot v_3)(v_1 \wedge v_2)$$

$$(a \wedge b) \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r) = b \cdot \{a \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r)\}$$

ex) $(a \wedge b) \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) = b \cdot \{a \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r)\}$

$$= b \cdot \{(a \cdot v_1)(v_2 \wedge v_3) - (a \cdot v_2)(v_1 \wedge v_3) + (a \cdot v_3)(v_1 \wedge v_2)\}$$
$$= \{(a \cdot v_1)(b \cdot v_2) - (a \cdot v_2)(b \cdot v_1)\}v_3 - \{(a \cdot v_1)(b \cdot v_3) - (a \cdot v_3)(b \cdot v_1)\}v_2$$
$$+\{(a \cdot v_2)(b \cdot v_3) - (a \cdot v_3)(b \cdot v_2)\}v_1$$

위의 식에서 a와 b를 서로 바꾸거나, a와 b가 같다면, 다음 성질도 알 수 있다.

$$(b \wedge a) \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r) = -(a \wedge b) \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r)$$

$$(a \wedge a) \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_r) = a \cdot \{a \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_r)\} = 0$$

$$(a \wedge b \wedge c) \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_r) = c \cdot [b \cdot \{a \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_r)\}]$$
$$= c \cdot \{(a \wedge b) \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_r)\} = (b \wedge c) \cdot \{a \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_r)\}$$

$w_1, w_2, \dots, w_r$도 1-vector 라면,

$$(w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_r) \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_r) = \left|\left(v_i \cdot w_j\right)\right| = det\left(v_i \cdot w_j\right)$$

C. dual vector

n 차원 공간에서 Cartesian coordinates basis $\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2, \dots, \mathbb{e}_n$로 이루어진 n-vector 를 단위 pseudoscalar I 라 한다. 다른 coordinates basis 로의 변환도 가능하다.

$$I = \mathbb{e}_1 \wedge \mathbb{e}_2 \dots \wedge \mathbb{e}_n$$

$v = (v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_r)$이라면, dual vector of v, v^d를 다음처럼 정의한다.

$$v^d = v \cdot I$$
$$v \cdot v^d = (v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_r) \cdot \{(v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_r) \cdot I\} =$$
$$=(v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_r \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_r) \cdot I = 0$$

v와 v^d는 서로 수직하고 1:1 이다.

예를 들어 3 차원 공간에서, $\mathbb{e}_1$에 대하여

$$(\mathbb{e}_1)^d = \mathbb{e}_1 \cdot I = \mathbb{e}_1 \cdot (\mathbb{e}_1 \wedge \mathbb{e}_2 \wedge \mathbb{e}_3) = \mathbb{e}_2 \wedge \mathbb{e}_3, \qquad I = \mathbb{e}_1 \wedge \mathbb{e}_2 \wedge \mathbb{e}_3,$$

$\mathbb{e}_2 \wedge \mathbb{e}_3$을 실체적으로 $\mathbb{e}_2$과 $\mathbb{e}_3$로 만드는 평면이라고 생각한다면, $\mathbb{e}_1$은 그 평면에 수직한 vector 이다. 반대로 $\mathbb{e}_2 \wedge \mathbb{e}_3$는 $\mathbb{e}_1$에 수직한 평면이기도 하다.

이 책에서 dual 은 '$\mathbb{e}_1$과 $\mathbb{e}_2 \wedge \mathbb{e}_3$는 동전의 앞뒤면이다'라는 정도로 이해한다. duality 는 projective geometry 에서, pseudoscalar 는 geometric algebra 에서 쓰는 용어이다.

dual vector 의 dual vector 는 원래의 vector 가 되지만 부호는 차원에 따라 다를 수 있다.

$$v^{dd} = v^d \cdot I = \pm v$$
$$I = \mathbb{e}_1 \wedge \mathbb{e}_2, \qquad (\mathbb{e}_1)^d = \mathbb{e}_1 \cdot I = \mathbb{e}_2, \qquad (\mathbb{e}_1)^{dd} = \mathbb{e}_2 \cdot I = -\mathbb{e}_1$$
$$I = \mathbb{e}_1 \wedge \mathbb{e}_2 \wedge \mathbb{e}_3, \qquad (\mathbb{e}_1)^d = \mathbb{e}_1 \cdot I = \mathbb{e}_2 \wedge \mathbb{e}_3, \qquad (\mathbb{e}_1)^{dd} = (\mathbb{e}_2 \wedge \mathbb{e}_3) \cdot I = \mathbb{e}_1$$

2 curvilinear coordinates system

미분 가능한 임의의 n 차원 공간 좌표계이다. 점의 좌표는 $P(p^1, p^2, \dots, p^n)$이고, 원점 O에서 P까지의 vector 를 의미한다.

A. basis

$P(p^1, p^2, \dots, p^n)$에서 basis u_i는 다음처럼 정의된다.

$$u_i = \frac{\partial P}{\partial p^i}$$

B. reciprocal basis

$u^i \cdot u_j = \delta^i_j$일 때 $u^1, u^2 \dots u^n$가 P에서 reciprocal basis 이다. 행렬 g^{ij}와 g_{jk}를 가정하여 그 점의 u^i는 u_j로, u_i는 u^j로 표현할 수 있다.

$$u^i = g^{ij} u_j, \qquad u^i \cdot u^k = g^{ij} u_j \cdot u^k = g^{ik}$$

$$u_i = g_{ij} u^j, \qquad u_i \cdot u_k = g_{ij} u^j \cdot u_k = g_{ik}$$

여기서, g_{jk}와 g^{ij}는 역행렬 관계이다.

$$u^i \cdot u_k = g^{ij} u_j \cdot u_k = g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$$

따라서, P에서 basis 들을 구하고, 행렬 $g_{ij} = u_i \cdot u_j$을 구하고, 역행렬 g^{ij}을 구하면 그 점의 u^i을 구할 수 있다.

C. infinitesimal volume $[dV]_r$

$[dV]_r$은 아주 작은 r 차원의 평행육면체 같은 것이다. 꼭지점은 $P(p^1, p^2, \dots, p^n)$이고 r 개의 모서리는 $u_{\sigma_1} dp^{\sigma_1}, u_{\sigma_2} dp^{\sigma_2}, \dots, u_{\sigma_r} dp^{\sigma_r}$이다.

$$\{p^{\sigma_1}, p^{\sigma_2}, \dots, p^{\sigma_r}\} \subset \{p^1, p^2, \dots, p^n\}, \qquad (\sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_r)$$

ex) $[dV]_3 = (u_1 \wedge u_3 \wedge u_4) dp^1 dp^3 dp^4$

D. $\partial[dV]_r$, boundary of $[dV]_r$

$[dV]_r$에 있는 2r 개의 (r-1) 차원의 표면(boundary)이 $\partial[dV]_r$이다.

$$\partial[dV]_r = \frac{\pm u^i}{dp^i} \cdot [dV]_r, \qquad \textit{Einstein summation } i$$

$$\partial[dV]_r = \frac{-u^i}{dp^i} \cdot [dV]_r \quad at\ P(\dots, p^i, \dots)$$

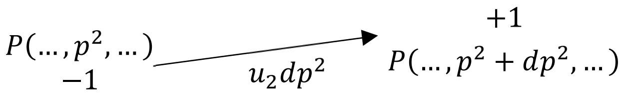
$$\partial[dV]_r = \frac{+u^i}{dp^i} \cdot [dV]_r \quad at\ P(\dots, p^i + dp^i, \dots)$$

E. examples of $\partial[dV]_r$

ex)

$$[dV]_1 = u_2 dp^2, \qquad \partial[dV]_r = \frac{\pm u^i}{dp^i} \cdot u_2 dp^2,$$

$$\frac{-u^2}{dp^2} \cdot u_2 dp^2 = -1, \qquad \frac{+u^2}{dp^2} \cdot u_2 dp^2 = +1$$

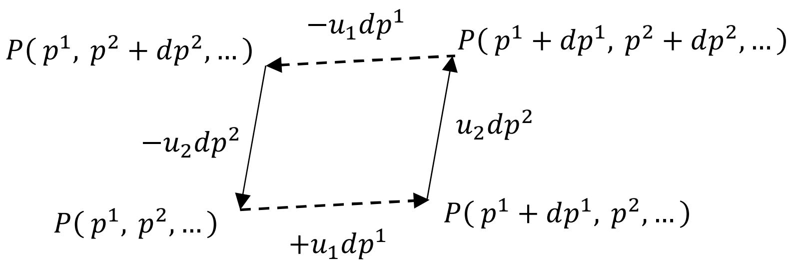


$\partial[dV]_1$는 ± 1이다. 인접한 $[dV]_1$의 테두리와는 부호가 반대이다. 적분할 때는 상쇄된다.

ex)

$$[dV]_2 = (u_1 \wedge u_2) dp^1 dp^2, \qquad \partial[dV]_r = \frac{\pm u^i}{dp^i} \cdot (u_1 \wedge u_2) dp^1 dp^2$$

$$\frac{\pm u^1}{dp^1} \cdot (u_1 \wedge u_2) dp^1 dp^2 = \pm u_2 dp^2, \qquad \frac{\pm u^2}{dp^2} \cdot (u_1 \wedge u_2) dp^1 dp^2 = \mp u_1 dp^1$$



$\partial[dV]_2$는 한 방향으로 돈다. $curl$이라 불리는 이유이다. 인접한 $\partial[dV]_2$와는 반대 방향이라, 적분할 때 겹치는 테두리는 상쇄된다. Stokes's theorem 을 유도할 수 있다.

3 curl

n 차원 공간에서 r-vector field A

1-vector field $\quad A = A_i u^i \quad \{i, j, k, \dots\} = \{1,2, \dots n\}$

2-vector field $\quad A = A_{ij} u^i \wedge u^j, \ (i < j)$

3-vector field $\quad A = A_{ijk} u^i \wedge u^j \wedge u^k, \ (i < j < k)$

…

(r-1)-vector field A가 있다면, 1.B 의 dot product 를 이용하여 r-vector field $curl(A)$을 정의할 수 있다.

$$A \cdot \partial[dV]_r = A \cdot \left(\frac{\pm u^i}{dp^i} \cdot [dV]_r\right) = \left(\frac{\pm u^i}{dp^i} \wedge A\right) \cdot [dV]_r = \left(u^i \wedge \frac{A}{\partial p^i}\right) \cdot [dV]_r$$

$$= curl(A) \cdot [dV]_r \,, \qquad curl(A) = u^i \wedge \frac{A}{\partial p^i}$$

적분하면 Stokes’s theorem 이다.

$$\oint A \cdot \partial[dV]_r = \oint curl(A) \cdot [dV]_r$$

vector field 를 reciprocal basis 로 표현하는 게 옳다. 그러면 $\partial[dV]_r$, $[dV]_r$과의 dot product 에서 basis 가 항상 상쇄되고, A 의 계수만 미분하여 $curl(A)$를 구할 수 있다. Cartesian coordinates 에서는 그렇게 하고 있다. reciprocal basis 와 basis 가 같기 때문이다. calculus 에서 covariant derivative 는 사족이다. 3.B 에서 확인하자.

A. $curl^2(A) = 0$

$$curl^2(A) = curl\{curl(A)\}$$

$$= u^j \wedge u^i \wedge \frac{\partial^2 A}{\partial p^j \partial p^i} = u^i \wedge u^j \wedge \frac{\partial^2 A}{\partial p^i \partial p^j} = -u^j \wedge u^i \wedge \frac{\partial^2 A}{\partial p^j \partial p^i} = 0$$

A 와 $curl(A)$의 모두 0 이 아니면 $curl(B) = A$인 B도 없고 $curl^2(A)$도 없다. 이 둘은 두 차원에 걸친 한 존재이다. $curl(A)$는 (r-1)-vector field A를 r 차원에서 보는 그림자 같은 것이다.

B. example of curl

이 새로운 $curl$의 정의가 맞는지 확인해보자. 잘 알려진 spherical coordinates 의 vector field $A = A_r \mathbb{e}_r + A_\theta \mathbb{e}_\theta + A_\emptyset \mathbb{e}_\emptyset$를 예로 든다. 그러려면 먼저 $\mathbb{e}_r, \mathbb{e}_\theta, \mathbb{e}_\emptyset$를 curvilinear

coordinates basis $u^r, u^\theta, u^\emptyset$로 바꾸어 계산하고 다시 $\mathbb{e}_r, \mathbb{e}_\theta, \mathbb{e}_\emptyset$로 환산해서 확인하자.

$$p^1 = r, \qquad p^2 = \theta, \qquad p^3 = \emptyset$$

$$u_r = \frac{\partial P}{\partial r} = \mathbb{e}_r, \qquad u_\theta = \frac{\partial P}{\partial \theta} = r\mathbb{e}_\theta, \qquad u_\emptyset = \frac{\partial P}{\partial \emptyset} = r\, sin\,\theta\, \mathbb{e}_\emptyset$$

$$u^r \cdot u_r = u^\theta \cdot u_\theta = u^\emptyset \cdot u_\emptyset = 1$$

$$u^r = \mathbb{e}_r, \qquad u^\theta = \frac{\mathbb{e}_\theta}{r}, \qquad u^\emptyset = \frac{\mathbb{e}_\emptyset}{r\, sin\,\theta}$$

$$A = A_r\mathbb{e}_r + A_\theta\mathbb{e}_\theta + A_\emptyset\mathbb{e}_\emptyset = A_r u^r + A_\theta r u^\theta + A_\emptyset r\, sin\,\theta\, u^\emptyset$$

항이 많으므로 $(u^\theta \wedge u^\emptyset)$ 항만 계산해보자.

$$curl(A) = u^i \wedge \frac{A}{\partial p^i}$$

$$u^\theta \wedge \frac{\partial(A_\emptyset r\, sin\,\theta)}{\partial \theta} u^\emptyset + u^\emptyset \wedge \frac{\partial(A_\theta r)}{\partial \emptyset} u^\theta = \left\{\frac{\partial(A_\emptyset r\, sin\,\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial(A_\theta r)}{\partial \emptyset}\right\}(u^\theta \wedge u^\emptyset)$$

$$= \frac{1}{r^2\, sin\,\theta}\left\{\frac{\partial(A_\emptyset r\, sin\,\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial(A_\theta r)}{\partial \emptyset}\right\}(\mathbb{e}_\theta \wedge \mathbb{e}_\emptyset)$$

관행적 결과와 계수는 같지만, 다른 점은 $\mathbb{e}_r$ 항이 아니라 $(\mathbb{e}_\theta \wedge \mathbb{e}_\emptyset)$ 항이라는 것이다. 우리가 $\mathbb{e}_r$과 $(\mathbb{e}_\theta \wedge \mathbb{e}_\emptyset)$를 구분하지 못해서 그렇다. 1.C

C. divergence

$divergence(A)$는 A^d에 대한 $curl$이다.

$$div(A) = curl(A^d), \qquad A^d = A \cdot I$$

D. example of divergence

같은 vector field $A = A_r\mathbb{e}_r + A_\theta\mathbb{e}_\theta + A_\emptyset\mathbb{e}_\emptyset$를 예로 들자. 3 차원에서

$$A = A_r\mathbb{e}_r + A_\theta\mathbb{e}_\theta + A_\emptyset\mathbb{e}_\emptyset = A_r u_r + \frac{A_\theta}{r} u_\theta + \frac{A_\emptyset}{r\, sin\,\theta} u_\emptyset$$

$$I = \mathbb{e}_1 \wedge \mathbb{e}_2 \wedge \mathbb{e}_3 = \mathbb{e}_r \wedge \mathbb{e}_\theta \wedge \mathbb{e}_\emptyset = r^2\, sin\,\theta\,(u^r \wedge u^\theta \wedge u^\emptyset)$$

$$A^d = A \cdot I = (A_r\mathbb{e}_r + A_\theta\mathbb{e}_\theta + A_\emptyset\mathbb{e}_\emptyset) \cdot (\mathbb{e}_r \wedge \mathbb{e}_\theta \wedge \mathbb{e}_\emptyset)$$

$$= A_r(\mathbb{e}_\theta \wedge \mathbb{e}_\emptyset) - A_\theta(\mathbb{e}_r \wedge \mathbb{e}_\emptyset) + A_\emptyset(\mathbb{e}_r \wedge \mathbb{e}_\theta)$$

$$= A_r r^2\, sin\,\theta\,(u^\theta \wedge u^\emptyset) - A_\theta r\, sin\,\theta\,(u^r \wedge u^\emptyset) + A_\emptyset r(u^r \wedge u^\theta)$$

or

$$A^d = A \cdot I = \left(A_r u_r + \frac{A_\theta}{r} u_\theta + \frac{A_\emptyset}{r \sin\theta} u_\emptyset\right) \cdot r^2 \sin\theta \left(u^r \wedge u^\theta \wedge u^\emptyset\right)$$

$$div(A) = curl\left(A^d\right) = u^i \wedge \frac{\partial A^d}{\partial p^i}$$
$$= \left\{\frac{\partial(A_r r^2 \sin\theta)}{\partial r} + \frac{\partial(A_\theta r \sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(A_\emptyset r)}{\partial\emptyset}\right\}\left(u^r \wedge u^\theta \wedge u^\emptyset\right)$$
$$= \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left\{\frac{\partial(A_r r^2 \sin\theta)}{\partial r} + \frac{\partial(A_\theta r \sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(A_\emptyset r)}{\partial\emptyset}\right\}\left(\mathbb{e}_r \wedge \mathbb{e}_\theta \wedge \mathbb{e}_\emptyset\right)$$

역시 관행적 결과와 계수는 같지만, 다른 점은 scalar 항이 아니라 $(\mathbb{e}_r \wedge \mathbb{e}_\theta \wedge \mathbb{e}_\emptyset)$ 항이라는 것이다. scalar 와 pseudoscalar 를 구분하지 못해서 그렇다. 1.C

E. $div(A) = 0$

3 과 3.C 에서 n 차원 공간의 (r-1)-vector field A와 그 dual vector field 인 (n-r+1)-vector A^d 에 대한 $curl(A)$와 $div(A)$의 정의는 다음과 같다.

$$curl(A) \cdot [dV]_r = A \cdot \partial[dV]_r$$
$$div(A) \cdot [dV]_{n-r+2} = curl\left(A^d\right) \cdot [dV]_{n-r+2} = A^d \cdot \partial[dV]_{n-r+2}$$

수학적으로 엄밀하지는 않지만 $divergence$에 대한 해석은 이렇다. $[dV]_{n-r+2}$의 테두리 $\partial[dV]_{\mathrm{n}-r+2}$를 통해서 A만큼의 속도로 들어오고 나가는 어떤 scalar 물리량이 있다면 그 양은 $(A \wedge \partial[dV]_{n-r+2}) \cdot I$일 것이다. 1.B 의 dot product 로 계산하면 그것이 $divergence$의 정의이다.

$$(A \wedge \partial[dV]_{n-r+2}) \cdot I = \partial[dV]_{n-r+2} \cdot (A \cdot I) = A^d \cdot \partial[dV]_{n-r+2} = div(A) \cdot [dV]_{n-r+2}$$

만약 모든 점에서 $div(A) = 0$이라면, 모든 $[dV]_{n-r+2}$에 들어오고 나가는 물리량의 합이 0이라는 의미이다. 어떤 물리량이 쌓이거나 새나가지 않고 흐른다는 뜻이다. 이때 A가 연속이라 한다.

다시 수학적으로 엄밀하지는 않지만, 더 중요한 의미는, 충분히 긴 시간 동안 어떤 물리량이 연속으로 계속 흐르게 된다면, A는 점점 파동으로 변해갈 것이다.

4 four vector fields

이 장을 읽고 나면 charge, spin, color, Higgs, mass 를 더 이해할 수 있다.

A. postulate

vector field A가 물리적 의미를 갖으려면 아래 조건이 필요하다.

1) vector field 는 두 차원에 걸친 한 존재이다. A와 $curl(A)$가 존재해야 한다.
2) vector field A는 연속이다. $div(A) = curl\{A^d\} = 0$, $A^d = A \cdot I$

   다른 말로 Lorentz gauge condition 이다.
3) $curl^d(A) = curl(A) \cdot I$도 존재한다. 따로 새롭게 존재하는 것은 아니다. 한 vector field 가 dual 차원에서 보여지는 모습이다.
4) 그리고 1)과 같은 이유로 $curl\{curl^d(A)\} = div\{curl(A)\} = Lap(A) = J$도 존재한다.

   Lap은 Laplacian 을 의미한다.

$curl^d(A)$도 연속이다.

$$div\{curl^d(A)\} = curl\{curl^{dd}(A)\} = \pm curl^2(A) = 0$$

$$\{curl^{dd}(A)\} = \{curl^d(A)\}^d = \pm curl(A) \quad 1.c$$ 부호는 차원에 따라 다르다.

그리고 다음 두 식은 $curl$의 성질이다.

$$curl^2(A) = 0, \qquad curl(J) = curl\{Lap(A)\} = curl^2\{curl^d(A)\} = 0$$

위 식들이 확장된 Maxwell's equations 을 만든다.

B. notation

우주는 시간을 포함하는 4 차원이다. Cartesian coordinates 로 쓴다. $P(x^1, x^2, x^3, x^4 = t)$.
basis $\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2, \mathbb{e}_3, \mathbb{e}_t$와 reciprocal basis $\mathbb{e}^1, \mathbb{e}^2, \mathbb{e}^3, \mathbb{e}^t$의 관계는 다음과 같다.

$$\mathbb{e}_i = \frac{\partial P}{\partial x^i}, \qquad \mathbb{e}_4 = \frac{\partial P}{\partial x^4} = \frac{\partial P}{\partial t} = \mathbb{e}_t, \qquad i,j = 1,2,3$$

$$\mathbb{e}_i \cdot \mathbb{e}_j = \delta_{ij}, \qquad \mathbb{e}^i \cdot \mathbb{e}_j = \delta^i_j, \qquad \mathbb{e}^i = \mathbb{e}_i$$

$$\mathbb{e}_t \cdot \mathbb{e}_t = \mathbb{e}^t \cdot \mathbb{e}^t = -1, \qquad \mathbb{e}^t \cdot \mathbb{e}_t = 1, \qquad \mathbb{e}^t = -\mathbb{e}_t$$

단위 pseudoscalar $I = \mathbb{e}_1 \wedge \mathbb{e}_2 \wedge \mathbb{e}_3 \wedge \mathbb{e}_t = -\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t$

편미분 표기

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \qquad \partial_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu}, \qquad \mu, \nu = 1,2,3,4$$

$$\square = \partial_{tt} - \partial_{11} - \partial_{22} - \partial_{33}, \qquad d'Alembert\ operator$$

C. four vector fields

시간을 포함하는 4 차원에서 4.A 의 가정을 만족하는 vector field 는 다음 네 가지이다. 이들이 네 가지 힘을 만든다. 이 네 가지 vector field 가 섞여서 존재해도 된다. 각 차원마다 글꼴을 다르게 쓴다.

1-vector field A

$$A = A_1 \mathbb{e}^1 + A_2 \mathbb{e}^2 + A_3 \mathbb{e}^3 + A_t \mathbb{e}^t$$

2-vector field $(\mathcal{B} + \mathcal{E})$

$$\mathcal{B} + \mathcal{E} = \mathcal{B}_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) + \mathcal{B}_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) + \mathcal{B}_3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)$$
$$+\mathcal{E}_1(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + \mathcal{E}_2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) + \mathcal{E}_3(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$$

3-vector field $\mathbb{A}$

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + \mathbb{A}_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + \mathbb{A}_3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) + \mathbb{A}_t(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)$$

scalar field $\mathscr{v}$

$$\mathscr{v}$$

4.1 1-vector field

관행적 표현

$$A = A_1\mathbb{e}^1 + A_2\mathbb{e}^2 + A_3\mathbb{e}^3 + A_t\mathbb{e}^t = A^1\mathbb{e}_1 + A^2\mathbb{e}_2 + A^3\mathbb{e}_3 + A^t\mathbb{e}_t, \qquad (A^t = \varphi)$$

$$A_i = A^i, \qquad A_t = -A^t = -\varphi$$

A. $curl(A)$

$$curl(A) = \mathbb{e}^\mu \wedge \partial_\mu A = B + E, \qquad \mu = 1,2,3,4$$

$$= (\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) + (\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) + (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)$$

$$+(\partial_1 A_t - \partial_t A_1)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + (\partial_2 A_t - \partial_t A_2)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) + (\partial_3 A_t - \partial_t A_3)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$$= B_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) + B_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) + B_3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) + E_1(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + E_2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) + E_3(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$$B: magnetic\ field, \qquad E: elctric\ field$$

B. $curl^2(A) = 0$

$$curl^2(A) = \mathbb{e}^\mu \wedge \partial_\mu\{curl(A)\}$$

$$= (\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \partial_3 B_3)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) + (\partial_2 E_3 - \partial_3 E_2 + \partial_t B_1)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$$+(\partial_3 E_1 - \partial_1 E_3 + \partial_t B_2)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + (\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1 + \partial_t B_3)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) = 0$$

Faraday's law, 아래 관행적 표현은 1-vector 항이지만, 실제는 3-vector 항이다.

$$\nabla \cdot B = 0, \qquad \nabla \times E + \partial_t B = 0$$

C. $div(A) = 0$

$$A^d = A \cdot I = -A_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) - A_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) - A_1(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) - A_t(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)$$

$$div(A) = curl\{A^d\} = \mathbb{e}^\mu \wedge \partial_\mu A^d = (\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \partial_3 A_3 - \partial_t A_t)I$$

Lorentz condition, 실제는 pseudoscalar 항이다.

$$\nabla \cdot A + \partial_t \varphi = 0$$

D. $Lap(A) = J$

$$curl^d(A) = curl(A) \cdot I$$

$$= E_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) + E_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) + E_3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) - B_1(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) - B_2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) - B_3(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$$Lap(A) = \mathbb{e}^\mu \wedge \partial_\mu\{curl^d(A)\} = J$$

$= (\partial_1 E_1 + \partial_2 E_2 + \partial_3 E_3)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) - (\partial_2 B_3 - \partial_3 B_2 - \partial_t E_1)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$

$-(\partial_3 B_1 - \partial_1 B_3 - \partial_t E_2)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) - (\partial_1 B_2 - \partial_2 B_1 - \partial_t E_3)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)$

$= -J_t(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) - J_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) - J_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) - J_3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)$

$J_t = -\rho: charge\ density, \qquad J_i: current\ density$

Gauss's law 와 Ampère–Maxwell law, 실제는 3-vector 항이다.

$\nabla \cdot E = -J_t = \rho, \qquad \nabla \times B = J + \partial_t E$

E. particle and wave

앞의 식의 E_i, B_j 를 A_μ 로 치환하자.（4.1A 와 4.1C）

$-J_t = \partial_1 E_1 + \partial_2 E_2 + \partial_3 E_3 = \partial_{11} A_t - \partial_{1t} A_1 + \partial_{22} A_t - \partial_{2t} A_2 + \partial_{33} A_t - \partial_{3t} A_3$

$= \partial_{11} A_t + \partial_{22} A_t + \partial_{33} A_t - \partial_{tt} A_t - \partial_t(\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \partial_3 A_3 - \partial_t A_t)$

$= \partial_{11} A_t + \partial_{22} A_t + \partial_{33} A_t - \partial_{tt} A_t = -\Box A_t$

$J_1 = \partial_2 B_3 - \partial_3 B_2 - \partial_t E_1 = \partial_{21} A_2 - \partial_{22} A_1 - \partial_{33} A_1 + \partial_{31} A_3 + \partial_{tt} A_1 - \partial_{t1} A_t$

$= \partial_{tt} A_1 - \partial_{11} A_1 - \partial_{22} A_1 - \partial_{33} A_1 + \partial_1(\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \partial_3 A_3 - \partial_t A_t) = \Box A_1$

$J_t = \Box A_t \qquad J_1 = \Box A_1 \qquad J_2 = \Box A_2 \qquad J_3 = \Box A_3$

F. $curl(J) = 0$

$curl(J) = \mathbb{e}^\mu \wedge \partial_\mu J = (\partial_1 J_1 + \partial_2 J_2 + \partial_3 J_3 - \partial_t J_t) I = 0$

conservative law, 실제는 pseudoscalar 항이다.

$\nabla \cdot J + \partial_t \rho = 0$

4.2 2-vector field

$$\mathcal{B}+\mathcal{E}=\mathcal{B}_1(\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^3)+\mathcal{B}_2(\mathbb{e}^3\wedge\mathbb{e}^1)+\mathcal{B}_3(\mathbb{e}^1\wedge\mathbb{e}^2)$$
$$+\mathcal{E}_1(\mathbb{e}^1\wedge\mathbb{e}^t)+\mathcal{E}_2(\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^t)+\mathcal{E}_3(\mathbb{e}^3\wedge\mathbb{e}^t)$$

A. $curl(\mathcal{B}+\mathcal{E})$

$$curl(\mathcal{B}+\mathcal{E})=\mathbb{e}^\mu\wedge\partial_\mu(\mathcal{B}+\mathcal{E})=\mathcal{A}$$
$$=\mathcal{A}_t(\mathbb{e}^1\wedge\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^3)+\mathcal{A}_1(\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^3\wedge\mathbb{e}^t)+\mathcal{A}_2(\mathbb{e}^3\wedge\mathbb{e}^1\wedge\mathbb{e}^t)+\mathcal{A}_3(\mathbb{e}^1\wedge\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^t)$$
$$\mathcal{A}_t=\partial_1\mathcal{B}_1+\partial_2\mathcal{B}_2+\partial_3\mathcal{B}_3,\qquad \mathcal{A}_1=\partial_2\mathcal{E}_3-\partial_3\mathcal{E}_2+\partial_t\mathcal{B}_1$$
$$\mathcal{A}_2=\partial_3\mathcal{E}_1-\partial_1\mathcal{E}_3+\partial_t\mathcal{B}_2,\qquad \mathcal{A}_3=\partial_1\mathcal{E}_2-\partial_2\mathcal{E}_1+\partial_t\mathcal{B}_3$$

관행적 표현

$$\mathcal{A}_t=\nabla\cdot\mathcal{B},\qquad \mathcal{A}=\nabla\times\mathcal{E}+\partial_t\mathcal{B}$$

B. $curl^2(\mathcal{B}+\mathcal{E})=0$

$$curl^2(\mathcal{B}+\mathcal{E})=\mathbb{e}^\mu\wedge\partial_\mu\mathcal{A}=(\partial_1\mathcal{A}_1+\partial_2\mathcal{A}_2+\partial_3\mathcal{A}_3-\partial_t\mathcal{A}_t)(-I)=0$$

관행적 표현

$$\nabla\cdot\mathcal{A}-\partial_t\mathcal{A}_t=0$$

C. $div(\mathcal{B}+\mathcal{E})=0$

$$(\mathcal{B}+\mathcal{E})^d=(\mathcal{B}+\mathcal{E})\cdot I$$
$$=\mathcal{E}_1(\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^3)+\mathcal{E}_2(\mathbb{e}^3\wedge\mathbb{e}^1)+\mathcal{E}_3(\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^3)-\mathcal{B}_1(\mathbb{e}^1\wedge\mathbb{e}^t)-\mathcal{B}_2(\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^t)-\mathcal{B}_3(\mathbb{e}^3\wedge\mathbb{e}^t)$$
$$div(\mathcal{B}+\mathcal{E})=curl\{\mathcal{B}^d+\mathcal{E}^d\}$$
$$=(\partial_1\mathcal{E}_1+\partial_2\mathcal{E}_2+\partial_3\mathcal{E}_3)(\mathbb{e}^1\wedge\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^3)-(\partial_2\mathcal{B}_3-\partial_3\mathcal{B}_2-\partial_t\mathcal{E}_1)(\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^3\wedge\mathbb{e}^t)$$
$$-(\partial_3\mathcal{B}_1-\partial_1\mathcal{B}_3-\partial_t\mathcal{E}_2)(\mathbb{e}^3\wedge\mathbb{e}^1\wedge\mathbb{e}^t)-(\partial_1\mathcal{B}_2-\partial_2\mathcal{B}_1-\partial_t\mathcal{E}_3)(\mathbb{e}^1\wedge\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^t)=0$$

관행적 표현

$$\nabla\cdot\mathcal{E}=0,\qquad \nabla\times\mathcal{B}-\partial_t\mathcal{E}=0$$

D. $Lap(\mathcal{B}+\mathcal{E})=\mathcal{J}$

$$curl^d(\mathcal{B}+\mathcal{E})=curl(\mathcal{B}+\mathcal{E})\cdot I=-\mathcal{A}_1\mathbb{e}^1-\mathcal{A}_2\mathbb{e}^2-\mathcal{A}_3\mathbb{e}^3-\mathcal{A}_t\mathbb{e}^t$$
$$Lap(\mathcal{B}+\mathcal{E})=\mathbb{e}^\mu\wedge\partial_\mu\{curl^d(\mathcal{B}+\mathcal{E})\}=\mathcal{J}$$

$$= (\partial_3\mathcal{A}_2 - \partial_2\mathcal{A}_3)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) + (\partial_1\mathcal{A}_3 - \partial_3\mathcal{A}_1)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) + (\partial_2\mathcal{A}_1 - \partial_1\mathcal{A}_2)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)$$

$$+(\partial_t\mathcal{A}_1 - \partial_1\mathcal{A}_t)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + (\partial_t\mathcal{A}_2 - \partial_2\mathcal{A}_t)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) + (\partial_t\mathcal{A}_3 - \partial_3\mathcal{A}_t)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$$= -\mathcal{K}_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) - \mathcal{K}_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) - \mathcal{K}_3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) + \mathcal{L}_1(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + \mathcal{L}_2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) + \mathcal{L}_3(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$\mathcal{K}_i$: *spin density*, $\quad$ $\mathcal{L}_i$: *spin current density*

관행적 표현

$$-\mathcal{K} = \nabla \times \mathcal{A}, \qquad -\mathcal{L} = \nabla\mathcal{A}_t - \partial_t\mathcal{A}$$

E. particle and wave

앞의 식의 $\mathcal{A}_\mu$ 를 $\mathcal{B}_i, \mathcal{E}_j$ 로 치환하자. (4.2A 와 4.2C)

$$\mathcal{K}_1 = \partial_2\mathcal{A}_3 - \partial_3\mathcal{A}_2 = \partial_2(\partial_1\mathcal{E}_2 - \partial_2\mathcal{E}_1 + \partial_t\mathcal{B}_3) - \partial_3(\partial_3\mathcal{E}_1 - \partial_1\mathcal{E}_3 + \partial_t\mathcal{B}_2)$$

$$= -\partial_{22}\mathcal{E}_1 - \partial_{33}\mathcal{E}_1 + \partial_t(\partial_2\mathcal{B}_3 - \partial_3\mathcal{B}_2) + \partial_1(\partial_2\mathcal{E}_2 + \partial_3\mathcal{E}_3)$$

$$= -\partial_{22}\mathcal{E}_1 - \partial_{33}\mathcal{E}_1 + \partial_t(\partial_t\mathcal{E}_1) - \partial_1(\partial_1\mathcal{E}_1) = \square\mathcal{E}_1, \qquad \nabla \cdot \mathcal{E} = 0, \qquad \nabla \times \mathcal{B} - \partial_t\mathcal{E} = 0$$

$$\mathcal{K}_1 = \square\mathcal{E}_1 \quad \mathcal{K}_2 = \square\mathcal{E}_2 \quad \mathcal{K}_3 = \square\mathcal{E}_3$$

$$\mathcal{L}_1 = -(\partial_1\mathcal{A}_t - \partial_t\mathcal{A}_1) = -\partial_1(\partial_1\mathcal{B}_1 + \partial_2\mathcal{B}_2 + \partial_3\mathcal{B}_3) + \partial_t(\partial_2\mathcal{E}_3 - \partial_3\mathcal{E}_2 + \partial_t\mathcal{B}_1)$$

$$= -\partial_{11}\mathcal{B}_1 + \partial_{tt}\mathcal{B}_1 - \partial_2(\partial_1\mathcal{B}_2 - \partial_t\mathcal{E}_3) - \partial_3(\partial_1\mathcal{B}_3 + \partial_t\mathcal{E}_2)$$

$$= -\partial_{11}\mathcal{B}_1 + \partial_{tt}\mathcal{B}_1 - \partial_2(\partial_2\mathcal{B}_1) - \partial_3(\partial_3\mathcal{B}_1) = \square\mathcal{B}_1,$$

$$\mathcal{L}_1 = \square\mathcal{B}_1 \quad \mathcal{L}_2 = \square\mathcal{B}_2 \quad \mathcal{L}_3 = \square\mathcal{B}_3$$

F. $curl(\mathcal{J}) = 0$

$$curl(\mathcal{J}) = curl(\mathcal{K} + \mathcal{L}) = \mathbb{e}^\mu \wedge \partial_\mu(\mathcal{K} + \mathcal{L})$$

$$= -(\partial_1\mathcal{K}_1 + \partial_2\mathcal{K}_2 + \partial_3\mathcal{K}_3)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) + (\partial_2\mathcal{L}_3 - \partial_3\mathcal{L}_2 - \partial_t\mathcal{K}_1)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$$+(\partial_3\mathcal{L}_1 - \partial_1\mathcal{L}_3 - \partial_t\mathcal{K}_2)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + (\partial_1\mathcal{L}_2 - \partial_2\mathcal{L}_1 - \partial_t\mathcal{K}_3)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) = 0$$

관행적 표현

$$\nabla \cdot \mathcal{K} = 0 \qquad \nabla \times \mathcal{L} - \partial_t\mathcal{K} = 0$$

4.3 3-vector field

$$\mathbb{A} = -\mathbb{A}_1 \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t - \mathbb{A}_2 \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t - \mathbb{A}_3 \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t - \mathbb{A}_t \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3$$

A. $curl(\mathbb{A})$

$$curl(\mathbb{A}) = \mathbb{e}^\mu \wedge \partial_\mu \mathbb{A} = \mathbb{V} = \mathbb{V}_\varphi I \qquad \mathbb{V}_\varphi = -\partial_t \mathbb{A}_t + \partial_1 \mathbb{A}_1 + \partial_2 \mathbb{A}_2 + \partial_3 \mathbb{A}_3$$

B. $curl^2(\mathbb{A}) = null$

$$curl^2(\mathbb{A}) = \mathbb{e}^\mu \wedge \partial_\mu \mathbb{V} = null$$

C. $div(\mathbb{A}) = 0$

$$\mathbb{A}^d = \mathbb{A} \cdot I = \mathbb{A}_1 \mathbb{e}^1 + \mathbb{A}_2 \mathbb{e}^2 + \mathbb{A}_3 \mathbb{e}^3 + \mathbb{A}_t \mathbb{e}^t$$

$$div(\mathbb{A}) = curl\left(\mathbb{A}^d\right) = \mathbb{e}^\mu \wedge \partial_\mu \mathbb{A}^d$$

$$= (\partial_2 \mathbb{A}_3 - \partial_3 \mathbb{A}_2)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) + (\partial_3 \mathbb{A}_1 - \partial_1 \mathbb{A}_3)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) + (\partial_1 \mathbb{A}_2 - \partial_2 \mathbb{A}_1)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)$$

$$+(\partial_1 \mathbb{A}_t - \partial_t \mathbb{A}_1)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + (\partial_2 \mathbb{A}_t - \partial_t \mathbb{A}_2)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) + (\partial_3 \mathbb{A}_t - \partial_t \mathbb{A}_3)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = 0$$

관행적 표현, $\nabla \times \mathbb{A} = 0 \qquad \nabla \mathbb{A}_t - \partial_t \mathbb{A} = 0$

D. $Lap(\mathbb{A}) = \mathbb{J}$

$curl^d(\mathbb{A}) = \mathbb{V}^d = \mathbb{V}_\varphi$ $\qquad$ $I^d = 1$이다. 5.C 에서 설명한다.

$$Lap(\mathbb{A}) = \mathbb{e}^\mu \wedge \partial_\mu \{curl^d(\mathbb{A})\} = \mathbb{J}$$

$$= \partial_1 \mathbb{V}_\varphi \mathbb{e}^1 + \partial_2 \mathbb{V}_\varphi \mathbb{e}^2 + \partial_3 \mathbb{V}_\varphi \mathbb{e}^3 + \partial_t \mathbb{V}_\varphi \mathbb{e}^t = \mathbb{J}_1 \mathbb{e}^1 + \mathbb{J}_2 \mathbb{e}^2 + \mathbb{J}_3 \mathbb{e}^3 + \mathbb{J}_t \mathbb{e}^t$$

$\mathbb{J}_i$: *color density*, $\quad \mathbb{J}_t$: *color current density*

관행적 표현, $\mathbb{J} = \nabla \mathbb{V}_\varphi \qquad \mathbb{J}_t = \partial_t \mathbb{V}_\varphi$

E. particle and wave

앞의 식의 $\mathbb{V}_\varphi$ 를 $\mathbb{A}_\mu$ 로 치환하자. (4.3A 와 4.3C).

$$\mathbb{J}_1 = \partial_1 \mathbb{V}_\varphi = \partial_1(\partial_t \mathbb{A}_t - \partial_1 \mathbb{A}_1 - \partial_2 \mathbb{A}_2 - \partial_3 \mathbb{A}_3) = \partial_{t1} \mathbb{A}_t - \partial_{11} \mathbb{A}_1 + \partial_{21} \mathbb{A}_2 - \partial_{31} \mathbb{A}_3$$

$$= \partial_{tt} A_1 - \partial_{11} \mathbb{A}_1 - \partial_{22} \mathbb{A}_1 - \partial_{33} \mathbb{A}_1 = \Box \mathbb{A}_1, \qquad \nabla \times \mathbb{A} = 0, \qquad \partial_t \mathbb{A} - \nabla \mathbb{A}_t = 0$$

$$\mathbb{J}_t = \partial_t \mathbb{V}_\varphi = \partial_t(\partial_t \mathbb{A}_t - \partial_1 \mathbb{A}_1 - \partial_2 \mathbb{A}_2 - \partial_3 \mathbb{A}_3) = \partial_{tt} \mathbb{A}_t - \partial_{1t} \mathbb{A}_1 - \partial_{2t} \mathbb{A}_2 - \partial_{3t} \mathbb{A}_t$$

$$= \partial_{tt} A_t - \partial_{11} \mathbb{A}_t - \partial_{22} \mathbb{A}_t - \partial_{33} \mathbb{A}_t = \Box \mathbb{A}_t$$

$\mathbb{J}_1 = \Box\mathbb{A}_1 \quad \mathbb{J}_2 = \Box\mathbb{A}_2 \quad \mathbb{J}_3 = \Box\mathbb{A}_3 \quad \mathbb{J}_t = \Box\mathbb{A}_t$

F. $curl(\mathbb{J}) = 0$

$curl(\mathbb{J}) = \mathbb{e}^\mu \wedge \partial_\mu(\mathbb{J}) = 0$

$(\partial_2\mathbb{J}_3 - \partial_3\mathbb{J}_2)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) = (\partial_3\mathbb{J}_1 - \partial_1\mathbb{J}_3)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) = (\partial_1\mathbb{J}_2 - \partial_2\mathbb{J}_1)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) = 0$

$(\partial_1\mathbb{J}_t - \partial_t\mathbb{J}_1)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) = (\partial_2\mathbb{J}_t - \partial_t\mathbb{J}_2)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) = (\partial_3\mathbb{J}_t - \partial_t\mathbb{J}_3)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = 0$

관행적 표현, $\nabla \times \mathbb{J} = 0 \quad \nabla\mathbb{J}_t - \partial_t\mathbb{J} = 0$

4.4 scalar field $\mathscr{v}$

A. $curl(\mathscr{v})$

$curl(\mathscr{v}) = e^{\mu} \wedge \partial_{\mu}\mathscr{v} = a \quad a = a_1 e^1 + a_2 e^2 + a_3 e^3 + a_t e^t$

$a_1 = \partial_1 \mathscr{v}, \quad a_2 = \partial_2 \mathscr{v}, \quad a_3 = \partial_3 \mathscr{v}, \quad a_t = \partial_t \mathscr{v}$

B. $curl^2(\mathrm{u}) = 0$

$curl^2(\mathscr{v}) = e^{\mu} \wedge \partial_{\mu} a = 0$

$(\partial_2 a_3 - \partial_3 a_2)(e^2 \wedge e^3) + (\partial_3 a_1 - \partial_1 a_3)(e^3 \wedge e^1) + (\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1)(e^1 \wedge e^2) +$

$(\partial_1 a_t - \partial_t a_1)(e^1 \wedge e^t) + (\partial_2 a_t - \partial_t a_2)(e^2 \wedge e^t) + (\partial_3 a_t - \partial_t a_3)(e^3 \wedge e^t) = 0$

관행적 표현, $\nabla \times a = 0 \quad \nabla a_t - \partial_t a = 0$

C. $div(\mathscr{v}) = null$

$\mathscr{v}^d = \mathscr{v}I$ $\qquad 1^d = I$이다. 5.C 에서 설명한다.

$div(\mathscr{v}) = curl(\mathscr{v}^d) = e^{\mu} \wedge \partial_{\mu}\mathscr{v}I = null$

D. $Lap(\mathscr{v}) = \mathscr{j}$

$curl^d(\mathscr{v}) = curl(\mathscr{v}) \cdot I$

$= -a_t(e^1 \wedge e^2 \wedge e^3) - a_1(e^2 \wedge e^3 \wedge e^t) - a_2(e^3 \wedge e^1 \wedge e^t) - a_3(e^1 \wedge e^2 \wedge e^t)$

$Lap(\mathscr{v}) = e^{\mu} \wedge \partial_{\mu}\{curl^d(\mathscr{v})\} = (-\partial_t a_t + \partial_1 a_1 + \partial_2 a_2 + \partial_3 a_3)I = \mathscr{j} = -m_{\varphi} I$

$m_{\varphi}, \quad m_{\varphi}: mass\ density$

관행적 표현, $\nabla \cdot a - \partial_t a_t = -m_p$

E. particle and wave

앞의 식의 a_{μ}를 $\mathscr{v}$ 로 치환하자. 하자.（4.4A）

$m_{\varphi} = \partial_t a_t - \partial_1 a_1 - \partial_2 v_2 - \partial_3 a_3 = \partial_{tt}\mathscr{v} - \partial_{11}\mathscr{v} - \partial_{22}\mathscr{v} - \partial_{33}\mathscr{v} = \Box\mathscr{v}$

$m_{\varphi} = \Box\mathscr{v}$

F. $curl(\mathscr{j}) = null$

$curl(\mathscr{j}) = e^{\mu} \wedge \partial_{\mu}\mathscr{j} = null$

4.5 questions

vector field A는 파동성을 띠고, $J = Lapl(A) = div\{curl(A)\}$는 입자성을 띤다. 한 존재의 두 모습이다. 서로 dual 차원이다. 또는 duality 이다.

3.E 에서 $J = div\{curl(A)\} \neq 0$는 $curl(A)$가 연속하지 않는 것이다. 입자는 $curl(A)$가 쌓이거나 새나가는 현상이다.

각 차원의 J는 이렇다.

color 밀도 : $\mathbb{e}^1, \mathbb{e}^2, \mathbb{e}^3$,

spin 밀도 : $(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3), (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1), (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)$

charge 밀도 : $(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)$,

mass 밀도 : $(I = -\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$

다음을 알 수 있다.

1) color 는 끈(string)의 개념이다.
2) spin 은 막(membrane)의 개념이다.
3) charge 는 알갱이(particle)의 개념이다.
4) mass 의 차원은 pseudoscalar 이다. 시간이 흘러야 존재한다.
5) 4.3E 에서 $\mathbb{e}^i$가 color(quark)라면 $\mathbb{e}^t$는 Higgs 이다. 질량을 만드는 데 꼭 필요하다.
6) 양전하와 음전하는 기하적 차이(isomer)일 것이다. $(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3), (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^3)$
7) 전자의 spin 은 charge 가 회전해서 만들어지는 게 아니다.
8) 전하를 고려하면 양성자에 quark 세 개가 있는 것은 우연이 아니다. 그렇다고 quark 에 전하가 존재하는 것은 아니다.

반대로 모르는 것도 생긴다.

1) 전자의 스핀은 전하의 일부분 모습인가? 그렇다면 스핀이 단지 ↑↓인 이유는?
2) 양성자 중성자는 있는데 음성자는 없을까?
3) 음질량이 없는 이유가 시간의 대칭이 없다는 뜻인가?
4) 전류는 전하가 움직이는 것이다. 하지만 4.1E 에서 current density 의 차원은 $(\mathbb{e}^i \wedge \mathbb{e}^j \wedge \mathbb{e}^t)$이다. 초전도체는 전하가 움직이는 게 아니라 spin 과 Higgs 가 결합된 상태인가?

내 QCD 지식은 부족하다.

5 sedenion - vector multiplication

6 장에서 에너지 밀도를 구하기 위해 vector norm 을 정의한다. 놀랍게도 이 과정은 vector 의 곱셈표(multiplication table)를 구하는 것과 같다.

16 basis 가 16 원수(sedenion)이다. 그리고 이들 중 8 basis 는 8 원수(octonion)가 된다. 다시 이들 중 4 basis 는 4 원수(quaternion)이 된다. 이제 vector 은 수이다. 하지만 Wikipedia 에서 검색하면 나오는 sedenion 의 곱셈표와는 다르다. 16 원수의 곱셈에는 교환법칙과 결합법칙이 성립하지 않는다.

sedenion $1, \mathbb{e}^1, \mathbb{e}^2, \mathbb{e}^3, \mathbb{e}^t, I$

$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2), (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3), (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1), (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t), (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t), (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$

$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3), (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t), (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t), (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)$

octonion $1, (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2), (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3), (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1), (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t), (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t), (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t), I$

quaternion $1, (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2), (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3), (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1)$

생소 하지만 설명을 시작하자.

A. norm

4 차원에서 vector norm $\|v\| = v \cdot v$의 정의는 불합리하다.

$$v = \mathbb{e}^1 + 2\mathbb{e}^2 + 3\mathbb{e}^t \qquad v \cdot v = (1)^2 + (2)^2 - (3)^2$$

$\|v\| = (1)^2 + (2)^2 + (3)^2$이 더 합리적이다.

$$v = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) \qquad v \cdot v = -(1)^2 + (2)^2$$

역시 $\|v\| = (1)^2 + (2)^2$이 더 합리적이다.

새 정의가 필요하다. 서로 dual 인 두 basis 를 곱하면 pseudoscalar 가 될 것으로 짐작한다. 크기도 basis 계수의 제곱이 될 것이다. 그래서 다음을 정의하자.

$$vv^d = \|v\|, \qquad v^d = v \cdot I, \qquad I = -\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t$$

이제 $\|v\|$는 pseudoscalar 이다. scalar 가 아니다.

B. basic multiplications

$vv^d = I$인 기본적인 곱셈표를 적어보자.

$$\mathbb{e}^1(-\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = \mathbb{e}^2(-\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)$$
$$= \mathbb{e}^3(-\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) = \mathbb{e}^t(-\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)$$
$$= (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)(-\mathbb{e}^1) = (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)(-\mathbb{e}^2)$$
$$= (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)(-\mathbb{e}^3) = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)(-\mathbb{e}^t) = I$$

$$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)(-\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)(-\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) = (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1)(-\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)$$
$$= (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) = (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) = I$$

1-basis 와 3-basis 의 곱은 commutative 하고 2-basis 와 2-basis 의 곱은 anti-commutative 하다.

C. 1^d, I^d

scalar 1은 어떤 수에 곱해도 그 수는 변하지 않는다. 교환법칙도 성립한다.

$$1v = v1 = v$$

기본적인 곱셈들이 정해지면 dual basis 도 다시 정의될 수 있다. 두 basis 가 곱해져서 I 가 될 때, 뒤의 basis 가 앞의 basis 의 dual basis 이다. 그 반대는 성립하지는 않는다. 곱셈에 교환법칙이 성립하지 않기 때문이다. 그렇다고 기존의 dual vector 의 정의가 바뀌지 않는다. 다만

$$1\{1^d\} = I = 1I, \qquad 1^d = I$$
$$I\{I^d\} = I = I1, \qquad I^d = 1 \neq I \cdot I = -1$$

1과 I의 dual basis 가 정해졌다.

D. 1 x 1

두 basis $\mathbb{e}^\mu, \mathbb{e}^\nu$가 한 평면 $(\mathbb{e}^\mu \wedge \mathbb{e}^\nu)$을 결정한다.

$$\mathbb{e}^\mu \mathbb{e}^\nu = (\mathbb{e}^\mu \wedge \mathbb{e}^\nu), \qquad (\mu \neq \nu)$$

E. norm (2)

vector norm 의 정의를 한 차원의 basis 로만 이루어진 vector 로 제한할 필요는 없다. 여러 차원의 basis 로 이루어진 vector 로 확장하자.

F. 4 x 4, 1 x 4, 2 x 4, 3 x 4

ex1) $vv^d = (I + 2)(1 + 2I) = ((1)^2 + (2)^2)I$

$vv^d = (1+2I)(I+2) = ((1)^2+(2)^2)I$

$1^2 + I^2 = 0$ $\qquad$ $I^2 = -1$

ex2) $vv^d = (\mathbb{e}^1 + 2)\{(-\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2I\} = ((1)^2+(2)^2)I$

$vv^d = \{(-\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2I\}(\mathbb{e}^1 + 2) = ((1)^2+(2)^2)I$

$\mathbb{e}^1 I = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$ $\qquad$ $I\mathbb{e}^1 = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$

ex3) $vv^d = \{(-\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2\}\{(-\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) + 2I\} = ((1)^2+(2)^2)I$

$vv^d = \{(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) + 2I\}\{(-\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2\} = ((1)^2+(2)^2)I$

$(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)I = -(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)$ $\qquad$ $I(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)$

ex4) $vv^d = \{(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2\}\{-\mathbb{e}^1 + 2I\} = ((1)^2+(2)^2)I$

$vv^d = \{-\mathbb{e}^1 + 2I\}\{(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2\} = ((1)^2+(2)^2)I$

$(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)I = \mathbb{e}^1$ $\qquad$ $I(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = \mathbb{e}^1$

G. 1 x 1, 3 x 3

ex5) $vv^d = \{\mathbb{e}^1 + 2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)\}\{(-\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(-\mathbb{e}^1)\} = ((1)^2+(2)^2)I$

$vv^d = \{(-\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(-\mathbb{e}^1)\}\{\mathbb{e}^1 + 2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)\} = ((1)^2+(2)^2)I$

$\mathbb{e}^1\mathbb{e}^1 + (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)^2 = 0$

다음처럼 정한다. 한 차원의 basis 제곱은 모두 같다. 다르게 정해도 된다.

$\mathbb{e}^1\mathbb{e}^1 = \mathbb{e}^2\mathbb{e}^2 = \mathbb{e}^3\mathbb{e}^3 = \mathbb{e}^t\mathbb{e}^t = 1$

$(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)^2 = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)^2 = (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)^2 = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)^2 = -1$

H. octonion, 2 x 2

ex6) $vv^d = \{(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)\}\{(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) - 2(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\} = ((1)^2+(2)^2)I$

$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) - (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) = 0$

위 식을 만족하기 위해 다음 곱셈을 정한다.

$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)^2 = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)^2 = +1$

$$(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)^2 = (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)^2 = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)^2 = (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1)^2 = +1$$

물론 -1도 가능하지만, Lorentz transformation 과 Pauli spin matrices 때문에 $+1$이다. 이 부호 하나가 시공간의 특성을 결정한다. $+1$이면 hyperbolic geometry, -1이면 elliptic geometry 가 된다. Lorentz transformation 은 5.1 에서 설명한다.

I. quaternion - Pauli spin matrices

Pauli spin matrices 는 quaternion 에 다름 아니다.

$$\mathbb{s}^1 = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3), \qquad \mathbb{s}^2 = (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1), \qquad \mathbb{s}^3 = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)$$

$$\mathbb{s}^1\mathbb{s}^2 = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) = \mathbb{s}^3$$

$$\mathbb{s}^1\mathbb{s}^1 = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) = 1, \qquad \mathbb{s}^2\mathbb{s}^2 = \mathbb{s}^3\mathbb{s}^3 = 1$$

$$\mathbb{s}^2\mathbb{s}^3 = -\mathbb{s}^3\mathbb{s}^2 = \mathbb{s}^1, \qquad \mathbb{s}^3\mathbb{s}^1 = -\mathbb{s}^3\mathbb{s}^1 = \mathbb{s}^2, \qquad \mathbb{s}^1\mathbb{s}^2 = -\mathbb{s}^2\mathbb{s}^1 = \mathbb{s}^3$$

$$\mathbb{s}^1\mathbb{s}^2\mathbb{s}^3 = (\mathbb{s}^1\mathbb{s}^2)\mathbb{s}^3 = \mathbb{s}^1(\mathbb{s}^2\mathbb{s}^3) = 1$$

물론 기존의 사원수 정의와는 다르다.

J. octonion (2)

나머지 octonion 의 곱셈을 정하자.

ex7) $vv^d = \{(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) + 2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)\}\{(-\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$vv^d = \{(-\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1)\}\{(-\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) + 2(-\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = \mathbb{s}^3\mathbb{s}^2 = -\mathbb{s}^1 = -(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)$$

$$(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) = (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) = \mathbb{s}^2\mathbb{s}^3 = \mathbb{s}^1 = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)$$

2-vector 와 2-vector 의 곱은 anti-commutative 하다.

ex8) $vv^d = \{(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) + 2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)\}\{(-\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) - 2(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$vv^d = \{(-\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) - 2(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\}\{(-\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) + 2(-\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = 0$$

$$(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) + (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) = 0$$

내 해석은 이렇다. 정답은 아니다. 두 평면도 한 평면을 결정할 수 있다. 두 평면에 수직인 평면이다. 공통인 직선 basis 는 dot product 하고 나머지 basis 가 평면을 결정한다.

$$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) = (\mathbb{e}^1 \cdot \mathbb{e}^1)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$$(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = -(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^2)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = -(\mathbb{e}^3 \cdot \mathbb{e}^3)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) = -(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$$(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) = -(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^2) = -(\mathbb{e}^3 \cdot \mathbb{e}^3)(\mathbb{e}^t \wedge \mathbb{e}^2) = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) = (\mathbb{e}^1 \cdot \mathbb{e}^1)(\mathbb{e}^t \wedge \mathbb{e}^2) = -(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)$$

위의 ex7)도 다시 해석하면

$$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) = -(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^3) = -(\mathbb{e}^1 \cdot \mathbb{e}^1)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) = -(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)$$

$$(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) = (\mathbb{e}^t \wedge \mathbb{e}^3)(\mathbb{e}^t \wedge \mathbb{e}^2) = (\mathbb{e}^t \cdot \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^2) = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)$$

K. 1 x 1, 3 x 3

ex9) $vv^d = \{\mathbb{e}^1 + 2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\}\{(-\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(-\mathbb{e}^2)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$$vv^d = \{(-\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(-\mathbb{e}^2)\}\{\mathbb{e}^1 + 2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$$

$$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) + (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = 0$$

$$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) - (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) = 0$$

자체가 곱셈표이다.

L. 1 x 3, 3 x 1

ex10) $vv^d = (\mathbb{e}^1 + 2\mathbb{e}^2)\{(-\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(-\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$$vv^d = \{(-\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(-\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\}(\mathbb{e}^1 + 2\mathbb{e}^2) = ((1)^2 + (2)^2)I$$

$$vv^d = (\mathbb{e}^t + 2\mathbb{e}^2)\{(-\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) + 2(-\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$$

$$vv^d = \{(-\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) + 2(-\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\}(\mathbb{e}^t + 2\mathbb{e}^2) = ((1)^2 + (2)^2)I$$

1-vector 와 3-vector 의 곱은 commutative 하다.

$$\mathbb{e}^1(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + \mathbb{e}^2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = 0, \qquad (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\mathbb{e}^1 + (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)\mathbb{e}^2 = 0$$

$$\mathbb{e}^t(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + \mathbb{e}^2(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) = 0, \qquad (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\mathbb{e}^t + (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)\mathbb{e}^1 = 0$$

내 해석은 이렇다. 한 직선과 그를 포함하는 입체가 그 직선에 수직한 평면을 결정한다. 공통인 직선 basis 는 dot product 한다.

$$\mathbb{e}^1(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) = \mathbb{e}^1(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t \wedge \mathbb{e}^3) = (\mathbb{e}^1 \cdot \mathbb{e}^1)(\mathbb{e}^t \wedge \mathbb{e}^3) = -(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$$\mathbb{e}^2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = (\mathbb{e}^2 \cdot \mathbb{e}^2)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$$\mathbb{e}^t(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) = \mathbb{e}^t(\mathbb{e}^t \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) = (\mathbb{e}^t \cdot \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) = -(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1)$$

$$\mathbb{e}^2(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) = \mathbb{e}^2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) = (\mathbb{e}^2 \cdot \mathbb{e}^2)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) = (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1)$$

M. 1 x 2, 2 x 3
conjugate, weak force and electromagnetic force

ex11) $vv^d = \{\mathbb{e}^2 + 2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)\}\{(-\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$vv^d = \{(-\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)\}\{\mathbb{e}^2 + 2(-\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$\mathbb{e}^2(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) - (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) = 0$

$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)\mathbb{e}^2 + (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = 0$

곱셈 $\mathbb{e}^2(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)$가 commutative 하면 곱셈 $(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)$는 anti-commutative 해야한다. 그 반대도 가능하다. 어느 것이 commutative 하고 어는 것이 anti-commutative 하냐는 선택이 전자기력과 약력을 결정짓는다.

자연의 선택은 이렇다. 한 평면과 그를 포함하는 입체가 그 평면에 수직한 직선을 결정한다. 또 그 입체와 그 평면도 그 직선을 결정한다. 마찬가지로 공통인 평면 basis 는 dot product 한다.

$(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) = -(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t \wedge \mathbb{e}^1) = -\{(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) \cdot (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)\}\mathbb{e}^1 = \mathbb{e}^1$

$= (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$

$\mathbb{e}^2(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) = -(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)\mathbb{e}^2 = \mathbb{e}^1$

ex12) $vv^d = \{\mathbb{e}^3 + 2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)\}\{(-\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$vv^d = \{(-\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1)\}\{\mathbb{e}^3 - 2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$\mathbb{e}^3(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) - (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) = 0$

$(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1)\mathbb{e}^3 + (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) = 0$

$(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) = \{(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) \cdot (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)\}\mathbb{e}^1 = -\mathbb{e}^1$

$\mathbb{e}^3(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) = -(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1)\mathbb{e}^3 = -\mathbb{e}^1$

ex13) $vv^d = \{\mathbb{e}^t + 2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)\}\{(-\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) - 2(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$vv^d = \{(-\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) - 2(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\}\{\mathbb{e}^t + 2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$\mathbb{e}^t(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) - (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) = 0$

$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\mathbb{e}^t + (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) = 0$

$(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) = \{(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) \cdot (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)\}\mathbb{e}^1 = \mathbb{e}^1$

$\mathbb{e}^t(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) = -(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\mathbb{e}^t = \mathbb{e}^1$

다음 첫 번째가 전자기력에 대한 식이고 두 번째가 약력에 대한 식이다. 6.A 와 6.B 에서 설명한다. 약력은 힘 자체가 약한 것이 아니라 힘이 상쇄되는 것이다.

$$(e^3 \wedge e^t)(e^3 \wedge e^1 \wedge e^t) + (e^3 \wedge e^1 \wedge e^t)(e^3 \wedge e^t) = 2e^1$$

$$e^2(e^1 \wedge e^2) + (e^1 \wedge e^2)e^2 = 0$$

N. 1 x 2, 2 x 3

ex14) $vv^d = \{e^1 + 2(e^1 \wedge e^t)\}\{(-e^2 \wedge e^3 \wedge e^t) + 2(e^2 \wedge e^3)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$$vv^d = \{(-e^2 \wedge e^3 \wedge e^t) + 2(e^2 \wedge e^3)\}\{e^1 + 2(-e^1 \wedge e^t)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$$

$$e^1(e^2 \wedge e^3) - (e^1 \wedge e^t)(e^2 \wedge e^3 \wedge e^t) = 0$$

$$(e^2 \wedge e^3)e^1 + (e^2 \wedge e^3 \wedge e^t)(e^1 \wedge e^t) = 0$$

앞의 곱셈처럼 1-basis 와 2-basis 의 곱은 anti-commutative 하고 2-basis 와 3-basis 의 곱은 commutative 하다. 혹시 자연에 반증이 있다면 이 선택은 바뀌어도 된다.

한 직선과 그에 수직한 평면이 입체를 결정한다. 또 그 평면과 그 직선은 부호가 반대인 그 입체를 결정한다.

$$e^1(e^2 \wedge e^3) = -(e^2 \wedge e^3)e^1 = (e^1 \wedge e^2 \wedge e^3)$$

$$(e^1 \wedge e^t)(e^2 \wedge e^3 \wedge e^t) = -(e^t \wedge e^1)(e^t \wedge e^2 \wedge e^3) = -(e^t \cdot e^t)e^1(e^2 \wedge e^3)$$

$$= e^1(e^2 \wedge e^3) = (e^2 \wedge e^3 \wedge e^t)(e^1 \wedge e^t)$$

x15) $vv^d = \{e^1 + 2(e^1 \wedge e^2)\}\{(-e^2 \wedge e^3 \wedge e^t) + 2(-e^3 \wedge e^t)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$$vv^d = \{(e^2 \wedge e^3 \wedge e^t) + 2(e^3 \wedge e^t)\}\{-e^1 + 2(e^1 \wedge e^2)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$$

$$e^1(e^3 \wedge e^t) + (e^1 \wedge e^2)(e^2 \wedge e^3 \wedge e^t) = 0$$

$$(e^3 \wedge e^t)e^1 - (e^2 \wedge e^3 \wedge e^t)(e^1 \wedge e^2) = 0$$

$$e^1(e^3 \wedge e^t) = -(e^3 \wedge e^t)e^1 = (e^1 \wedge e^3 \wedge e^t) = -(e^3 \wedge e^1 \wedge e^t)$$

$$(e^1 \wedge e^2)(e^2 \wedge e^3 \wedge e^t) = -(e^2 \wedge e^1)(e^2 \wedge e^3 \wedge e^t) = -(e^2 \cdot e^2)e^1(e^3 \wedge e^t)$$

$$= -e^1(e^3 \wedge e^t) = (e^2 \wedge e^3 \wedge e^t)(e^1 \wedge e^2)$$

5.1 rotor

rotor R은 geometric algebra 에서 쓰는 용어이다.

5.M 에서

$$\mathbb{e}^1(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) = -\mathbb{e}^2, \qquad \mathbb{e}^2(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) = \mathbb{e}^1$$

$$\mathbb{e}^1(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) = -\mathbb{e}^t, \qquad \mathbb{e}^t(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) = -\mathbb{e}^1$$

평면 $(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)$ 위의 $\mathbb{e}^1, \mathbb{e}^2$를 $\Delta \ll 1$만큼 회전시키는 방법.

$$\mathbb{e}'^1 = \mathbb{e}^1 R = \mathbb{e}^1\{1 + \Delta(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)\} = \mathbb{e}^1 - \Delta\mathbb{e}^2, \qquad R = \{1 + \Delta(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)\}$$

$$\mathbb{e}'^2 = \mathbb{e}^2 R = \mathbb{e}^2\{1 + \Delta(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)\} = \mathbb{e}^2 + \Delta\mathbb{e}^1$$

작은 회전을 연속하면 rotor 가 된다.

$$R = \{1 + \Delta_1(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)\}\{1 + \Delta_2(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)\} \ldots$$

$$= \lim_{\Delta \to 0}\{1 + \Delta(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)\}^{\frac{\theta}{\Delta}} = e^{(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)\theta}$$

$$= 1 + \theta(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) + \frac{1}{2!}\theta^2(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)^2 + \frac{1}{3!}\theta^3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)^3 + \cdots$$

$$= \begin{cases} \cosh\theta + \sinh\theta\,(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) & (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)^2 = +1 \\ \cos\theta + \sin\theta\,(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) & (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)^2 = -1 \end{cases}$$

$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)^2$의 이 부호에 따라 hyperbolic geometry 와 elliptic geometry 로 나뉜다.

만약 $R = e^{(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\theta}$이고 $\tanh\theta = \beta = v/c$ 이면 Lorentz 변환이다.

$$\mathbb{e}'^1 = \mathbb{e}^1 R = \mathbb{e}^1 e^{(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\theta} = \mathbb{e}^1\{\cosh\theta + \sinh\theta\,(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\} = \mathbb{e}^1 \cosh\theta - \mathbb{e}^t \sinh\theta$$

$$\mathbb{e}'^t = \mathbb{e}^t R = \mathbb{e}^t e^{(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\theta} = \mathbb{e}^t\{\cosh\theta + \sinh\theta\,(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\} = \mathbb{e}^t \cosh\theta - \mathbb{e}^1 \sinh\theta$$

6 energy density and force

우리는 이미 전자기학에서 에너지 밀도 $eng(A)$를 알고 있다. magnetic field B와 electric field E의 제곱이다. 관행적 표현으로

$$eng(A) = \frac{1}{2}(B^2 + E^2) = \frac{1}{2}\{(B_i)^2 + (E_i)^2\}, \qquad i = 1,2,3$$

$(B^2 + E^2)$은 $curl(A) = B + E$의 vector norm 에 다름 아니다. 이 책의 표현은 이렇다.

$$eng(A) = \frac{1}{2}\|B + E\| = \frac{1}{2}\|curl(A)\| = \frac{1}{2}curl(A)curl^d(A)$$

에너지 밀도는 pseudoscalar I 차원이다. 시간은 꼭 흘러야 한다.

그리고 힘 F는 이렇다.

$$F = div\{eng(A)\} = curl\{eng^d(A)\}, \qquad eng^d(A) = -eng(A)I, \qquad I^d = 1 = -I^2,$$

$$eng^d(A) = -\frac{1}{2}\begin{cases}\{curl(A)curl^d(A)\}I = +(scalar)I^2 \\ curl(A)\{curl^d(A)I\} = \pm\{curl(A)\}^2 \\ \{Icurl(A)\}curl^d(A) = \pm\{curl^d(A)\}^2\end{cases}$$

$eng^d(A)$는 세 가지 경우가 가능하다. 그냥 $scalar$는 아니다. 그러면 방향성(vector)을 잃는다. $curl(A)$, $curl^d(A)$ 자체가 16 원수이고 변수이다. 경우에 따라 부호는 바뀐다.

vector field X, Y에 대해 다음 가정은 불편하지 않다.

$$curl(XY) = \{curl(X)\}Y + X\{curl(Y)\}$$

$eng^d(A)$의 경우 중에서 힘 F를 정의할 수 있는 것은 세 번째 경우이다. 첫 번째 경우는 pseudoscalar I에 대한 $curl$은 $null$이기 때문이고, 두 번째 경우는 $curl\{curl(A)\} = 0$이기 때문이다.

따라서 힘 F는 다음과 같다.

$$F = \pm\frac{1}{2}curl\left(\{curl^d(A)\}^2\right) = \pm\frac{1}{2}\left\{curl\{curl^d(A)\}curl^d(A) + curl^d(A)curl\{curl^d(A)\}\right\}$$
$$= \pm\frac{1}{2}\{Lap(A)curl^d(A) + curl^d(A)Lap(A)\} = \pm\frac{1}{2}\{Jcurl^d(A) + curl^d(A)J\}$$

힘은 $div\{eng(A)\} \neq 0$인 곳, 즉 에너지 밀도가 연속하지 않은 곳에 생긴다. 그 말은 다시 $Lap(A) = J \neq 0$인 곳, 즉 $curl(A)$가 연속하지 않은 곳, 입자가 있는 곳에 생긴다.

주의할 점은 $Jcurl^d(A) + curl^d(A)J$의 항들 중에서 1-vector 항만이 힘이다. 힘은 방향성을 갖는 scalar 항의 $curl$이기 때문이다. 전자기력부터 확인하자.

A. electromagnetic force

4.1. 1-vector field A에 의한 힘이다. $curl^d(A)$는 2-vector 이고 J는 3-vector 이다. 그리고 5.M 에서 그 두 vector field 의 곱이 1-vector 가 되는 경우 그 곱셈은 commutative 하다. 전하밀도와 전류밀도가 $curl^d(A)$와 작용하여 힘이 발생한다.

$$eng(A) = \frac{1}{2}\{curl(A)curl^d(A)\} = \frac{1}{2}\{(B_i)^2 + (E_i)^2\}I, \qquad i = 1,2,3$$

$$eng^d(A) = \frac{1}{2}\{curl^d(A)\}^2$$

$$F = Jcurl^d(A)$$

$$J = -J_t(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) - J_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) - J_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) - J_3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$$curl^d(A) = E^d + B^d = E_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) + E_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) + E_3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)$$
$$-B_1(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) - B_2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) - B_3(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$$

ex) $$F_1\mathbb{e}^1 = -J_t(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)E_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)$$
$$+J_3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)B_2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)$$
$$+J_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)B_3(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = (-J_tE_1 + J_2B_3 - J_3B_2)\mathbb{e}^1$$ 5.Ca

$$F_t\mathbb{e}^t = -J_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)E_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)$$
$$-J_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)E_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1)$$
$$-J_3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)E_3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) = (-J_1E_1 - J_2E_2 - J_3E_3)\mathbb{e}^t$$

관행적 표현. 여기서 $F_t\mathbb{e}^t$는 마찰(열)로 시간당 없어지는 에너지이다.

$$F = -J_tE + J \times B = \rho E + J \times B, \qquad F_t = -J \cdot E$$

B. weak force

4.2. 2-vector field $(\mathcal{B} + \mathcal{E})$에 의한 힘이다. $curl^d(\mathcal{B} + \mathcal{E})$는 1-vector 이고 $\mathcal{J}$는 2-vector 이다. 그리고 5.M 에서 그 두 vector field 의 곱이 1-vector 가 되는 경우 그 곱셈은 anti-commutative 하다. 힘은 상쇄된다. spin 밀도와 spin current 밀도가 $curl^d(\mathcal{B} + \mathcal{E})$와 작용하여 힘이 발생한다.

$$eng(\mathcal{B} + \mathcal{E}) = \frac{1}{2}\{curl(\mathcal{B} + \mathcal{E})curl^d(\mathcal{B} + \mathcal{E})\} = \frac{1}{2}\{(\mathcal{A}_i)^2 + (\mathcal{A}_t)^2\}I, \qquad i = 1,2,3$$

$$eng^d(\mathcal{B} + \mathcal{E}) = \frac{1}{2}\{curl^d(\mathcal{B} + \mathcal{E})\}^2$$

$$F = \frac{1}{2}[\mathcal{J}\{curl^d(\mathcal{B} + \mathcal{E})\} + \{curl^d(\mathcal{B} + \mathcal{E})\}\mathcal{J}] = 0$$

약력은 힘 자체가 약한 것이 아니라 힘이 상쇄되는 것이다. 기하학적 특성이다. 그리고 $F_t e^t$도 0 이므로 마찰 등으로 없어지는 에너지도 없다.

그렇다고 힘이 상쇄된다는 것이 에너지가 없어진다는 것은 아닐 것이다. 아마 용수철 양쪽을 반대 방향으로 누르거나 당기는 것과 같을 것이다. 약력에는 용수철이 꼭 필요하다.

그래도 용수철의 양쪽에서 누르거나 당기는 힘을 합해보자.

$$curl^d(\mathcal{B}+\mathcal{E}) = -\mathcal{A}_1 e^1 - \mathcal{A}_2 e^2 - \mathcal{A}_3 e^3 - \mathcal{A}_t e^t$$

$$\mathcal{J} = \mathcal{K} + \mathcal{L}$$

$$\mathcal{K} = -\mathcal{K}_1(e^2 \wedge e^3) - \mathcal{K}_2(e^3 \wedge e^1) - \mathcal{K}_3(e^1 \wedge e^2)$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1(e^1 \wedge e^t) + \mathcal{L}_2(e^2 \wedge e^t) + \mathcal{L}_3(e^3 \wedge e^t)$$

$$F = Lap(\mathcal{B}+\mathcal{E})curl^d(\mathcal{B}+\mathcal{E})$$

ex) $$F_1 e^1 = -\mathcal{L}_1(e^1 \wedge e^t)\mathcal{A}_t e^t + \mathcal{K}_3(e^1 \wedge e^2)\mathcal{A}_2 e^2 + \mathcal{K}_2(e^3 \wedge e^1)\mathcal{A}_3 e^3$$

$$= (\mathcal{L}_1\mathcal{A}_t + \mathcal{K}_2\mathcal{A}_3 - \mathcal{K}_3\mathcal{A}_2)e^1 \qquad \text{5.M}$$

관행적 표현

$$F = \mathcal{A}_t\mathcal{L} + \mathcal{K} \times \mathcal{A}$$

C. strong force

4.3. 3-vector field $\mathbb{A}$에 의한 힘이다. $curl^d(\mathbb{A})$는 scalar 이고 $\mathbb{J}$는 1-vector 이다. 두 vector field 의 곱은 commutative 하다. color 밀도와 Higgs 밀도가 $curl^d(\mathbb{A})$와 작용하여 힘이 발생한다.

$$eng(\mathbb{A}) = \frac{1}{2}\{curl(\mathbb{A})curl^d(\mathbb{A})\} = \frac{1}{2}\left(\mathbb{V}_\varphi\right)^2 I$$

$$eng^d(\mathbb{A}) = \frac{1}{2}\{curl^d(\mathbb{A})\}^2$$

$$F = \mathbb{J}curl^d(\mathbb{A})$$

$$curl^d(\mathbb{A}) = \mathbb{V}_\varphi$$

$$\mathbb{J} = \mathbb{J}_1 e^1 + \mathbb{J}_2 e^2 + \mathbb{J}_3 e^3 + \mathbb{J}_t e^t$$

ex) $$F_1 e^1 = \mathbb{J}_1 e^1 \mathbb{V}_\varphi = \mathbb{V}_\varphi \mathbb{J}_1 e^1$$

$$F_t e^t = \mathbb{J}_t e^t \mathbb{V}_\varphi = \mathbb{V}_\varphi \mathbb{J}_t e^t$$

관행적 표현

$$F = \mathbb{V}_\varphi \mathbb{J}, \qquad F_t = \mathbb{V}_\varphi \mathbb{J}_t$$

수식으로만 해석하면 color 밀도 자체가 힘이고 Higgs 밀도는 열이나 빛으로 시간당 없어지는 에너지로 보인다.

D. gravitational force

4.4. scalar $\mathscr{v}$에 의한 힘이다. $curl^d(\mathscr{v})$는 3-vector scalar 이고 $\mathscr{j}$는 pseudoscalar 이다. 두 vector field 의 곱은 commutative 하다. mass 밀도와 $curl^d(\mathscr{v})$와 작용하여 힘이 발생한다.

$$eng(\mathscr{v}) = \frac{1}{2}\{curl(\mathscr{v})curl^d(\mathscr{v})\} = \frac{1}{2}\{(a_i)^2 + (a_t)^2\}I, \qquad i = 1,2,3$$

$$eng^d(\mathscr{v}) = -\frac{1}{2}\{curl^d(\mathscr{v})\}^2$$

$$F = -\mathscr{j}curl^d(\mathscr{v})$$

$$curl^d(\mathscr{v}) = -a_t(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) - a_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) - a_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) - a_3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$$\mathscr{j} = -m_\varphi I$$

ex) $F_1\mathbb{e}^1 = -m_\varphi I a_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = -m_\varphi a_1\mathbb{e}^1$

$$F_t\mathbb{e}^t = -m_\varphi I a_t(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) = -m_\varphi a_t\mathbb{e}^t$$

관행적 표현

$$F = -m_\varphi a, \qquad F_t = -m_\varphi a_t$$

4.4.에서 $m_\varphi I$는 질량 밀도이기도 하지만 6 에서 에너지 밀도이기도 하다. 잘 아는 운동에너지 $m_\varphi v^2/2$와 위치에너지 $m_\varphi gh$ 에서 $m_\varphi I$가 에너지 밀도이고 속도 v와 중력가속도와 높이의 곱 gh 는 시간과 길이의 비(ratio)로 해석하는 게 맞다. 운동량 $m_\varphi v$도 그렇다.

우리는 16 basis 로 이루어진 공간에 살고 있다. 자연은 아름답다. 군더더기가 없다.